

## GRAPES の紹介と活用事例紹介

大阪教育大学附属池田高等学校教諭 友田勝久

### 1. はじめに

授業をしていて、「このグラフを動かせたらな」とか、「グラフを順々に描いていくところを見せられたらな」とか思うことがよくあります。静止したグラフなら印刷して配れば十分ですが、関数式にパラメータが含まれているときには、パラメータの変化に応じてグラフが動く様子を印刷するのは困難です。このようなときに役立つのが GRAPES です。

GRAPES は、関数のグラフのほかに、陰関数のグラフや不等式の領域、さらには媒介変数表示の曲線も描くことができますから、高校生が必要としている関数のグラフなら、ほとんどすぐに描くことができます。さらに、点やベクトルを成分に分解することなく扱うことができるほか、円と直線との交点や垂線の足を求めるなどの関数があること、また、点をドラッグして動かしそれに伴う図形の変化を調べることができるなど、図形分野での利用を想定した多くの機能があります。簡単なプログラム実行機能を持ち、ちょっとしたアニメーションを実行したり、関数を波形に持つ音を出したりすることもできます。そして何よりも操作が簡単で、すぐに使うことができます。

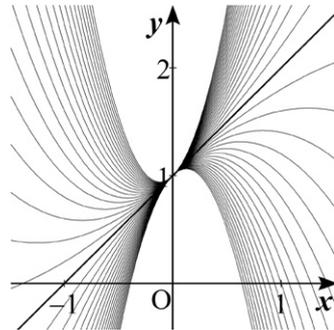
それでは、GRAPES の魅力を、高校数学を題材に紹介していきましょう。

### 2. 条件の変化によるグラフの変化を調べる

グラフや変域にパラメータが含まれているとき、パラメータの変化に伴ってグラフが変化します。手作業では、ひとつひとつのグラフを描くことは簡単でも、少しずつ条件を変えたグラフを数多く描くのは困難です。GRAPES が活躍する典型的なパターンですが、ここでは 2 次関数について

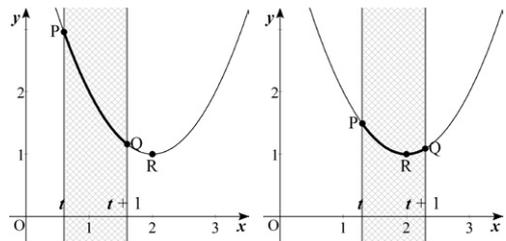
の 2 つの例をあげてみましょう。

最初の例は、「関数  $y = ax^2 + bx + c$  における、係数  $b$  とグラフの関係」です。係数  $a$  や  $c$  がグラフの位置や形状にどのように関わっているかは、よく知られていますが、係数  $b$  については、そう簡単ではありません。しかし、係数  $b$  の値を保ったまま、係数  $a$  を動かせば一目瞭然です。



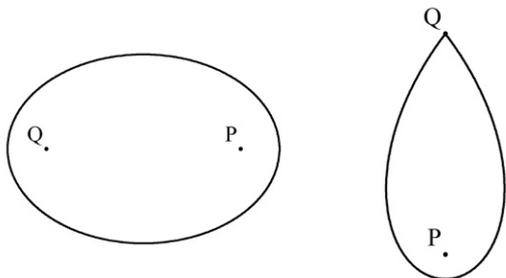
$a$  の値を変化させても、グラフは常にある直線と  $y$  軸上で接していることから、この直線と係数  $b$  に関わりがあることがわかります。

次の例は、「区間  $t \leq x \leq t+1$  における  $y = x^2 + 4x + 5$  の最小値」です。閉区間における連続関数の最小値は、区間の端の値か極小値かのどちらかですが、区間が動いていく様子を想像するのは、生徒にとって結構難しいのです。しかし、この場合も GRAPES を使って、パラメータ  $t$  をあれこれと動かしてグラフの変化を調べれば、どのように考えればよいのか—どのように場合分けをすればよいのかが、これも一目瞭然です。



### 3 描くのが難しい関数のグラフを描く

2点 P, Q からの距離の和が一定であるような点の軌跡は楕円です。楕円上の点を X とすれば  $XP + XQ = 2a$  ( $a$  は正の定数) が成り立ちます。



「零」には生徒たちも大喜び

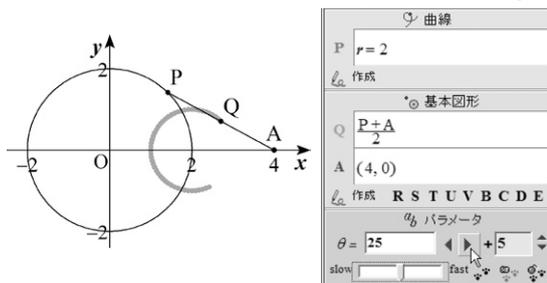
では、 $k$  を定数として  $kXP + XQ = 2a$  を満たすような点はどのような図形を描くのでしょうか。ちょっとした遊び心があれば誰でも考えそうなことです。こんなとき、GRAPES が役立ちます。

生徒が自分の力で描かなくては意味がないという主張もあるでしょう。しかし、グラフを描くために数学を学ぶものではありません。一方、数学的な事柄を理解するためにグラフを利用するのだという観点に立てば、GRAPES の利用は、数学理解のための大きな手助けになることがわかります。

とにかく、高度な計算力がなくても、どんな方程式でもすぐにグラフ化できるのですから、誰でも「グラフを楽しむ」ことが可能です。すばらしいことだと思いませんか。

### 4 パラメータを動かして軌跡を描く

これについては、いくつも例をあげることができますが、よくあるものとして、「円周  $x^2 + y^2 = 2^2$  上の動点 P と定点 A(4, 0) の中点 Q の



軌跡」を考えてみましょう。

生徒たちはごく簡単な図を描いた後、計算で軌跡の方程式を求めます。しかし、その軌跡がどのような意味を持つかを調べることはしません。これでよいのでしょうか。テストでの得点を考えるだけならそれでよいのですが、「式の計算を利用して図形の性質を調べる」という本来の目的からすれば、求めた図形の意味を考えさせたいところです。円周上の点が動くとき中点がどのように軌跡を描いていくかを、実際に見れば、求めた答の意味は明らかです。こうして、生徒は、式の計算と図形の意味の両方からこの問題を理解することができます。他の例でもそうですが、パラメータを含んだグラフを観察するときは、結果だけを見るのではなく、パラメータの変化に伴ってグラフがどのように動くかを見るのが重要です。時として、「目から鱗」の感激が得られます。

### 5 楽しみましょう

GRAPES のいいところは、方程式や関係式がすぐにグラフになり、いろいろ条件を変えても瞬時に描き直してくれるところです。気軽にグラフを描けるのです。また、グラフ電卓に比べて画面が広く、操作も簡単、しかも、式を通常使う形で表示できるので、プレゼンテーションに適しています。

ただ、授業で使うとか、学校教育に活用するとかを考える前に、まず先生自身が十分に使ってください。楽しさや驚きやがあるはずですよ。その感激を生徒たちに伝えたいという気持ちが沸いてきたら、それがすてきな授業への第一歩です。

### 6 GRAPES にアクセスしよう

ここでは、GRAPES の持つ可能性のほんの一端を紹介したにすぎません。下記 URL にアクセスして、多くのサンプルや資料をご覧ください。

<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak>